

Задача 1

Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.

Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

Решение:

Пусть x — задач решил Вася в первый день.

Пусть y — задач решил Петя в первый день.

Вася за v — дней решит: $x + (x+1) + (x+1) + \dots + (x+v-1) = xv + \frac{v(v-1)}{2}$

Петя за p — дней решит: $y + (y+2) + (y+4) + \dots + (y+2(p-1)) = yp + p(p-1)$

Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

Так как в первый день каждый решил хотя бы одну задачу, то $y \geq 1$

Рассмотрим неравенство $yp + p(p-1) < 300$. Самый маленький возможный $y = 1$, тогда

$$1 \cdot p + p(p-1) < 300$$

$$p^2 < 300$$

Не так много чисел, квадраты которых меньше 300, нас просят найти наибольший возможный $p \leq 17$, рассмотрим все случаи:

1)

$$p = 17; \quad y \cdot 17 + 17(17-1) < 300$$

$$17y < 28$$

$$y = 1$$

$$1 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 289$$

Проверим, мог ли Вася решить 289 задач за 16 дней

$$xv + \frac{v(v-1)}{2} = 289$$

$$2xv + v(v-1) = 578$$

$$v(2x - v - 1) = 578$$

$$v(2x - v - 1) = 2 \cdot 17^2$$

Нет, в этом уравнении всегда $v \neq 16$

2)

$$p = 16; \quad v = 16;$$

$$y \cdot 16 + 16(16-1) = x \cdot 16 + \frac{16(16-1)}{2}$$

$$y + 15 = x + 7,5$$

Такого быть не может, так как целое плюс целое равно целое.

3)

$$p = 15; \quad v = 16;$$

$$y \cdot 15 + 15(15-1) = x \cdot 16 + \frac{16(16-1)}{2}$$

$$15y + 15 \cdot 14 = 16x + 8 \cdot 15$$

$$15y = 16x - 6 \cdot 15$$

$$y = x - 6 + \frac{x}{15}$$

$$x = 15t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 6 + \frac{x}{15} = 15t - 6 + t = 16t - 6$$

$$\text{Тогда наименьший возможный } x = 15t = 15; \quad 15 \cdot 16 + \frac{16 \cdot (16-1)}{2} = 360 > 300$$

Такого быть не может.

4)

$$p = 14; \quad v = 16;$$

$$y \cdot 14 + 14(14-1) = x \cdot 16 + \frac{16(16-1)}{2}$$

$$14y + 14 \cdot 13 = 16x + 8 \cdot 15$$

$$14y = 16x - 62$$

$$7y = 8x - 31$$

$$y = x - 4 + \frac{x-3}{7}$$

$$\frac{x-3}{7} = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x - 3 = 7k$$

$$x = 7k + 3$$

$$y = x - 4 + \frac{x-3}{7} = 7k + 3 - 4 + \frac{7k+3-3}{7} = 8k - 1$$

$$(x; y) = (7k + 3; 8k - 1)$$

Получили решение уравнения в целых числах. Попробуем подобрать пример.

Пусть $k = 1$, тогда

$$(x; y) = (7k + 3; 8k - 1) = (10; 7)$$

Проверим, что число задач в сборнике меньше 300. Если Вася в первый день решил 10 задач и решал задачи 16 дней, то он решил всего

$$xv + \frac{v(v-1)}{2} = 10 \cdot 16 + \frac{16 \cdot (16-1)}{2} = 280$$

Подходит.

Ответ: 14 наибольшее количество дней Пети, например,

Вася в первый день решил 10 задач и решал задачи 16 дней.

Петя в первый день решил 7 задач и решал задачи 14 дней

Задача 2

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. В первой школе он составил 54 балла. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, при этом средние баллы за тест увеличились на 12.5% в обеих школах.

Какой минимальный средний балл мог быть у учащихся во второй школе?

Решение:

Пусть в первой школе было n учеников, а во второй школе было m учеников, а балл ученика, который перешел из одной школы в другую был x .

Составим таблицу

	Сумма баллов		Средний балл	
Школа 1	$54n$	$54n - x$	54	$\frac{54n - x}{n - 1}$
Школа 2	Bm	$Bm + x$	B	$\frac{Bm + x}{m + 1}$

Если средний балл в каждой школе увеличился на 12,5%, то

$$\frac{54n - x}{n - 1} = 1,125 \cdot 54$$

$$(54n - x) \cdot 100 = 6075 \cdot (n - 1)$$

$$6075 - 100x = 675n$$

$$243 - 4x = 27n$$

И перед нами линейное уравнение в целых числах. Решаем методом спуска.

$$4x = 243 - 27n$$

$$x = \frac{243 - 27n}{4} = 60 - 6n + \frac{3 - 3n}{4}$$

$$\frac{3 - 3n}{4} = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3 - 3n = 4k$$

$$3n = 3 - 4k$$

$$n = 1 - k - \frac{k}{3}$$

$$\frac{k}{3} = t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$k = 3t$$

Спуск закончен. Начинаем подъем.

$$n = \frac{3 - 12t}{3} = 1 - 4t$$

$$x = \frac{243 - 27(1 - 4t)}{4} = 54 + 27t$$

Это решение уравнения в общем виде $(n; x) = (1 - 4t; 54 + 27t)$

Сколько учеников, писавших тест, могло быть в первой школе?

Количество учеников натуральное число и каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, тогда

$$(n; x) = (1 - 4t; 54 + 27t)$$

$$\begin{cases} 1 - 4t > 0; & t < \frac{1}{4} \\ 54 + 27t > 0; & t > -2 \end{cases}$$

Тогда для целого t возможны только два целых значения $t = -1; 0$

$$t = -1; \quad n = 5; \quad x = 27$$

$$t = 0; \quad n = 1; \quad x = 54$$

Понимаем, что в первой школе не мог быть один ученик, так как если он перешел в другую школу, то учеников в первой школе не осталось, и средний балл вырасти на 12,5% не мог. Тогда остается единственный случай.

Тогда в первой школе могло быть только 5 учеников.

Какой максимальный балл мог быть у учащегося из первой школы?

Заметим, что перешедший из одной школы в другую ученик не имел наибольший из возможных баллов, иначе с его уходом из школы средний балл школы не смог бы увеличиться. Тогда ученик с максимальным баллом T остался в первой школе, а у остальных трех учеников школы средний балл должен быть самый маленький из возможных, т.е. по 1 баллу.

$$\frac{1+1+1+T}{4} = 60,75$$

$$3+T = 243$$

$$T = 240$$

Ответ: максимальный балл у учащегося из первой школы 240.

Задача 3

Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В конце Наташа сделала на 1001 фотографию больше, чем Маша. Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий?

Решение:

В этой задаче девочки начали делать фотографии одновременно, и завершили в один день, разница заключается в количестве фотографий в первый день. Чтобы не путаться в переменных, пусть n фотографий сделала Наташа в первый день, а m фотографий сделала Маша в первый день, тогда

$$\text{за } d \text{ дней Наташа сделала } n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+1 \cdot (d-1)) = \frac{2n + (d-1)}{2} \cdot d$$

фотографий,

$$\text{а Маша сделала } m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+1 \cdot (d-1)) = \frac{2m + (d-1)}{2} \cdot d \text{ фотографий.}$$

Наташа сделала фотографий больше Маши, тогда

$$\frac{2n + (d-1)}{2} \cdot d - \frac{2m + (d-1)}{2} \cdot d = 1001$$

$$d \cdot (2n + (d-1) - 2m - (d-1)) = 2002$$

$$d \cdot (n - m) = 1001$$

Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий?

$$\text{Маша в последний день сделала } (m + 1 \cdot (d-1)) < 40$$

$$d \cdot (n - m) = 1001$$

$$d \cdot (n - m) = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Наташа сделала максимальное количество фотографий при условии, что количество дней максимально возможное, а разница между n и m наименьшая.

$$\text{Пусть } d = 11 \cdot 13; \quad (n - m) = 7, \text{ но } (m + d - 1) < 40; \quad d < 40$$

$$\text{Тогда остается только случай (выбираем из 7; 11; 13) } d = 13; \quad (n - m) = 7 \cdot 11; \quad n = 77 + m.$$

Получим наибольшее значение для m : $(m + d - 1) < 40$; $d = 13$; $m + 12 < 40$; $m < 28$. Так как неравенство строгое, то наибольшее возможное значение для m равно 27. Тогда максимально возможное значение для $n = 77 + m = 77 + 27 = 104$ (это в первый день), всего Наташа могла сделать за 13 дней $\frac{2n + (d - 1)}{2} \cdot d = \frac{2 \cdot 104 + (13 - 1)}{2} \cdot 13 = 1430$

Ответ: 1430 фотографии максимально могла сделать Наташа за 13 дней, если в первый день сделала 104 фотографии, а Маша в первый день сделала 27 фотографий.

Задача 4

Настя добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью 80 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института.

Какое наибольшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?

Решение:

Средняя скорость это весь путь на все время (не всегда равна среднему арифметическому).

Пусть весь путь $2S$. Пусть скорость обратно x км/ч. Если обратный путь занял больше времени, то $x < 80$.

$$\text{Средняя скорость } v_{cp} = \frac{2S}{\frac{S}{80} + \frac{S}{x}} = \frac{2S \cdot 80 \cdot x}{S \cdot (x + 80)} = \frac{160x}{x + 80}$$

$$v_{cp} = \frac{160x}{x + 80} = \frac{160x + 80 \cdot 160 - 80 \cdot 160}{x + 80} = 160 - \frac{80 \cdot 160}{x + 80} = 160 - \frac{2^9 \cdot 5^2}{x + 80}$$

Какое наибольшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?

$$v_{cp} = 160 - \frac{2^9 \cdot 5^2}{x + 80}, \text{ тогда чем больше } x + 80, \text{ тем меньше } \frac{2^9 \cdot 5^2}{x + 80}. \text{ А наибольшее значение}$$

средней скорости достигается при самом маленьком $\frac{2^9 \cdot 5^2}{x + 80}$. Тогда задача сводится к

поиску наибольшего значения для $80 < x + 80 < 160$, такого что

$$\text{что } k(x + 80) = 2^9 \cdot 5^2.$$

Найдем наибольшее целое число между 80 и 160. $2^4 \cdot 5 < 2^7 < 2^5 \cdot 5$

$$\text{Тогда } x + 80 = 2^7 = 128; \quad v_{cp} = 160 - \frac{2^9 \cdot 5^2}{x + 80} = 160 - \frac{2^9 \cdot 5^2}{2^7} = 160 - 100 = 60$$

Ответ: 60 км/ч при скорости «обратно» равной 48 км/ч

Задача 5

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе?

Решение:

Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе.

Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

$$\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{2}{11}, \quad \frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5}$$

$$\frac{m_1}{d} \leq \frac{2}{9}, \quad \frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}. \text{ Тогда } \frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{8}{9}$$

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{8}{9} + 1} = \frac{9}{17}$$

Ответ: Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$

Задача 6

Ученики писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались трудными, всем участникам теста добавили по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось. Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком минимальном числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение:

Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Очевидно, что средний балл всех участников после добавления составил 95. Имеем два уравнения:

$$90N = 75(N - a) + 100a$$

$$95N = 79(N - b) + 103b$$

Откуда
$$\begin{aligned} 15N &= 25a, & 3N &= 5a \\ 16N &= 24b, & 2N &= 3b \end{aligned}$$

Поэтому

целое число N кратно 5 и кратно 3, т. е. кратно 15. Таким образом, $N \geq 15$.

Теперь покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 74 балла, 1 участник — 80 баллов и 9 участников по 100 баллов. Тогда средний балл был равен 90, средний балл участников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Задача 7

Выступление спортсмена оценивают 7 судей, каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 включительно до 10 включительно. Известно, что все судьи выставили различные оценки. Результат спортсмена по старой системе оценивания — это среднее арифметическое семи оценок судей. Обозначим этот результат через A . Результат спортсмена по новой системе оценивания получается так: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое оставшихся пяти оценок. Обозначим этот результат через B . Найдите наибольшее возможное значение числа $A - B$.

Решение: Пусть x — наименьшая из семи оценок, z — наибольшая, Y — сумма остальных пяти оценок.

$$A - B = \frac{x + Y + z}{7} - \frac{Y}{5} = \frac{5x - 2Y + 5z}{35} \leq \frac{5x - 2(x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5) + 5z}{35} =$$

$$= \frac{5z - 5x - 30}{35} \leq \frac{5 \cdot 10 - 5 \cdot 0 - 30}{35} = \frac{4}{7}$$

Число $A - B$ действительно может равняться $\frac{4}{7}$, если судьи выставили оценки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10.

Задача 8

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Решение:

Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Пусть было пройдено

x уровней по 3 звезды

y уровней по 2 звезды

z уровней по 1 звезде

Тогда всего звезд было $3x + 2y + z = 17$. Заряд аккумулятора уменьшился на $3x + 6y + 9z = 33$ пункта.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 17 \\ 3x + 6y + 9z = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 17 \\ x + 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$4x + 4y + 4z = 28$$

$$x + y + z = 7$$

Т.е. было пройдено 7 уровней.

Было установлено, что всего было пройдено 7 уровней, тогда $0 \leq x \leq 7; 0 \leq y \leq 7; 0 \leq z \leq 7$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 17 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$$

$$2x + y = 10$$

$$y = 10 - 2x$$

$$x + 10 - 2x + z = 7$$

$$x - z = 3$$

$$\begin{cases} x = 3 + z \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

Тогда возможны следующие случаи:

$$z = 0; x = 3; y = 4$$

$$z = 1; x = 4; y = 2$$

$$z = 2; x = 5; y = 0$$

$$z = 3; x = 6; y < 0$$

Найдем очки:

$$9000 \cdot 3 + 5000 \cdot 4 + 2000 \cdot 0 = 47000$$

$$9000 \cdot 4 + 5000 \cdot 2 + 2000 \cdot 1 = 48000$$

$$9000 \cdot 5 + 5000 \cdot 0 + 2000 \cdot 2 = 49000$$

Ответ: а) не может; б) 7 уровней в) 49000 очков, например, пять уровней по 3 звезды, 0 уровней по 2 звезды, 2 уровня по 1 звезде.